
單維彰 (2025)。

文化取徑的數學課程與學習—初始倡議。

臺灣數學教育期刊。待刊論文。

<https://doi.org/10.6278/tjme.202501/PP.001>

文化取徑的數學課程與學習—初始倡議

單維彰

國立中央大學師資培育中心 / 數學系

本文是「數學自身是人類諸多文化中的一種次文化，數學文化對於該地區的數學教育有著舉足輕重的影響」此一主張的發展，倡議以數學文化作為數學課程與教學設計的啟發與參照。為表示此倡議合理，本文提出一些支持性的證據。以文化作為課程探究的進路，不僅引用歷史事實，也關注跨文化比較，但在應用各地文化中的數學發展史之餘，更留意器物制度與社會習慣對於數學教育的啟示；因此它座落在民族數學和「數學史與數學教學之關聯」的交集內。此倡議的動機源自於數學存在一個放諸於四海皆準的主流次文化，而個人的數學學習受其當地母文化孕育薰陶，有一定之初始知識、技能與習慣，因此數學的學習可以視為使學生適應一個新文化的過程。就母文化對於數學教育的影響而言，本文首先指出華語對於數學學習的支持：一字一音與內建十進制，接著探討華語數詞的分節結構對學習的影響；其次分析《九章算術》對數學學習與數學觀造成的影響，本文認為有些影響值得維繫，而且它恰好符合時代潮流，另外一些則值得細心察覺，並加以討論。文化取徑並不鎖定母文化，當母文化不足以提供典範時，外地文化必須成為觀摩對象。本文最後在「數與量」的學習內容中舉例，解釋文化取徑的課程探究方式。本文所提之倡議嘗試將「數學史與數學教學之關聯」放在課程層次，從社會文化與民族數學探究數學課程與教學設計的可能性；為表示此倡議有用，本文也嘗試據此理念提出有待實徵研究的問題。

關鍵字：九章算術、文化中的數學、民族數學、數與量、數學課程

通訊作者：單維彰，e-mail：shann@math.ncu.edu.tw

收稿：2024年7月11日；

接受刊登：2024年11月28日。

Shann, W. C. (2025).

The cultural approach for mathematics curriculum design and learning activities—An initiative.

Taiwan Journal of Mathematics Education. Advance online publication.

<https://doi.org/10.6278/tjme.202501/PP.001>

The Cultural Approach for Mathematics Curriculum Design and Learning Activities—An Initiative

Wei-Chang Shann

Center for Teacher Education / Department of Mathematics, National Central University

This article suggests that "mathematics itself is a subculture among many human cultures, and mathematical culture has a decisive influence on mathematics education in the region." It is advocated that mathematics culture be used as inspiration and reference for designing mathematics curriculum and teaching activities. This article presents some supporting evidence to show that this initiative is reasonable. The cultural approach for curriculum inquiries quotes historical facts and pays attention to cross-cultural comparisons. In addition to applying the history of mathematics development in various cultures, it also minds the enlightenment of artifact systems and social habits of mathematics education. Therefore, this approach lies within the intersection of ethnomathematics and HPM. The motivation for this initiative comes from the fact that there is a mainstream subculture of mathematics in the world, and an individual's mathematics learning is nurtured by his or her host culture. Therefore, the learning of mathematics can be regarded as the process of adapting students to a new culture. As far as the influence of host culture on mathematics education is concerned, this article first points out the support of the Chinese language for mathematics learning: monosyllabic and built-in decimal system. Then it discusses the impact of the group structure of Chinese numerals on learning. Secondly, it analyzes the impact of "Nine Chapters on the Mathematical Art" on mathematics learning and mathematical epistemology. This article believes that some influences are worth maintaining and are just in line with the trend of international views, while others are worthy of careful observation and discussion. However, the cultural approach does not focus on the host culture. When the host culture is not enough to provide a model, foreign cultures must become the object of observation. Finally, this article takes the teaching concept of "Number and Quantity" as examples to explain the cultural approach to curriculum inquiry. This initiative attempts to place HPM at the curriculum level and to explore the possibility of a mathematics curriculum from the perspective of sociocultural and ethnomathematics. To show that this initiative is useful for mathematics education researchers, this article also attempts to raise questions that need to be empirically researched based on this concept.

Keyword: *Nine Chapters on the Mathematical Art*, mathematics in culture, ethnomathematics, number and quantity, mathematics curriculum

Corresponding author : Wei-Chang Shann , e-mail : shann@math.ncu.edu.tw

Received : 11 July 2024;

Accepted : 28 November 2024.

壹、緒論

Kline (1954) 和 Wilder (1950) 開啟了文化面向的數學論述，Burton (2009) 與劉柏宏 (2016) 進一步將數學文化 (mathematical culture) 細分為數學中的文化 (culture of mathematics) 以及文化中的數學 (mathematics in culture)。劉柏宏接著論述數學文化在教育中的價值，他感慨於「傳統的數學教學只關心數學知識本身，卻忽略數學知識所源起的文化脈絡」，並援引 Nasir 等人 (2008) 的結果而認為「因此很難引起學生的有感學習」(劉柏宏, 2021)。並不是只有數學或數學教育領域關切數學的文化面向，例如李約瑟研究所的歷史學家 Lloyd 爵士 (2009, pp. 28–57) 以希臘與中國的數學文化比較，商榷十九世紀由歐洲菁英所定義的「學科」內容與範式 (paradigm) 的合宜性。

本文可以作為劉柏宏 (2021, 頁 79)「數學自身是人類諸多文化中的一種次文化……數學文化對於該地區的數學教育有著舉足輕重的影響」此一主張的發展，倡議以數學文化作為數學課程研究之方法，並在「數與量」的學習內容中舉例。國際間已經有類似的研究，例如 Aikenhead (2021a, 2021b) 長年從教育哲學的角度提倡基於文化的、以數學文化為教育目標的、適合多數學生的中學數學課程，但本文並不主張文化作為數學教育目標，而是立足於本地文化而探究基於數學文化的課程研究，而且在理念論述之外舉出具體範例。

本文關注的課程是 Goodlad 所指的正式課程 (formal curriculum) (Rogers, 1981)，它的時間跨距是 3 年、6 年或 12 年。有些課程學者，例如課程史家 Kliebard (1975)，認為課程研究 (curriculum studies) 或探究 (inquiries) 有時候只是理念 (ideology) 的推論或辯證，但是理念與意識形態之間只有模糊的界線，這是課程作為一個學術領域 (professional or scholarly field) 令人挫折的現象。以筆者親身參與臺灣自西元 2000 年以來數學課綱研修的經驗而言，前面的說法不虛：課綱研修常是根據理念所做的推論，極少有機會參採課程研究的結果。但是許多教材教法、補救教學、特殊教育的實徵研究，只能在現行課程的大前提之下進行，如果因為課程這個上樑不正而導致後續研究的品質折損或成效不彰，對於研究者是很可惜的。所以課程研究應該受到數學教育領域的適當關注，而且希望課程研究能在理念導引的思考方法之外，尋求別的方法。

基於事實的課程研究方法，大致可分為橫向的跨國數學課程或教科書比較，以及縱向的數學課程沿革歷史探究。在臺灣，前者主要有楊德清 (例如楊德清、鄭婷芸, 2015)、徐偉民 (例如徐偉民、曾于珏, 2013)，以及筆者 (例如陳宜良等人, 2005) 的工作，特別是楊德清在此主題上指導了 39 篇博碩士論文。至於後者，主要是鄭章華 (2018) 主編的專書，探究自民國 57 年九年國民義務教育實施以來至民國 100 年之數學課程標準或綱要，以及游自達與陳淑娟 (2016) 對解嚴前後時期的口述史研究。

探究「如何設計課程」的方法，稱為課程進路或取徑 (curriculum approach)；本文將取徑與進路當作同義詞，在修辭上交替使用。Ornstein (1987) 為課程進路提供的定義，被廣

泛接受：「涵蓋課程觀、領域知識與課程實施原理的整體性立場與原則性傾向」；其中課程觀是指個人對於課程的歷史、心理與學習理論、社會議題所持的哲學性觀點，領域知識即什麼是領域內的共同基礎、什麼是重要知能的認識觀或認識論。Ornstein 對於課程進路的整理，成為後來討論此議題的基礎之一。

本文倡議的文化取徑數學課程與學習，就是想要以文化的考量作為一條數學課程發展的進路（a mathematics curriculum approach）。此進路常需引用歷史事實，也關注橫向比較，但在應用各地文化中的數學發展史之餘，更留意器物制度與社會習慣對於數學教育的啟示，將於後文解釋並舉例說明。

筆者將此文化取徑的課程研究法座落在民族數學（ethnomathematics）和「數學史與數學教學之關聯」（relations between History and Pedagogy of Mathematics，以下簡稱 HPM）的交集內。一方面，D'Ambrosio（1985）為民族數學奠基的論文中，本來就開宗明義地將民族數學定位於 HPM 當中，而這麼做是為了替「歷史進路的數學教學」（historical approach to the teaching of mathematics）鋪一條新的途徑。發展至今，民族數學的內容包括為各別文化中的器物或制度創造數學模型，例如陳文豪為印尼婚禮習俗做出數值模型（Ja'faruddin & Chen, 2023）；或者在現行課程的前提下，為特定族群（通常是該社會中的少數族裔）設計特殊的數學教材教法，例如姚如芬（2014）在阿里山南區部落所做的原住民數學教學模組。正因為民族文化影響數學學習，所以民族數學可以探究個別學習主題的民族特徵，而本文則認為可以根據這些學習上的特徵而規畫屬於自己的數學課程。

另一方面，洪萬生（1998a）簡單地解釋 HPM 為「數學史學對數學教育的一種應用，目的當然是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效」，他也很早就指出教師在課堂內實踐 HPM 的方法與內容（洪萬生，1998b），蘇惠玉主編的《HPM 通訊》電子期刊（<https://hpmociety.tw/hpmnewsletters/>）全都可以視為 HPM 在教材教法層面的實踐。Fauvel 與 Van Maanen（2002）主編的論文集，可謂 HPM 第一個廿五年的成果彙整，當中已經提到課程層面的 HPM，也就是應用數學史啟發數學課程的設計。例如等比數列同時造成等差數列（在次方意義上）的「發現」，導引至指數與對數的「發明」，兩位主要人物的情義相惜，同代天文學家的接納與讚頌，可以螺旋編入各階段的課程——作者建議把情義與讚頌安排在發現與發明的前面；類似地，古希臘、巴比倫以及古中國對於測量的不同觀點所發展的不同數學，托勒密結合希臘與巴比倫數學而創制的弦表，經伊斯蘭傳入歐洲再傳到亞洲的三角比值表，也可以螺旋編入各階段的課程。這些啟發，可以幫助數學課程更為有機地發展數與量、幾何、代數、函數主題的內容。

以下，筆者先提出文化取徑數學課程研究的背景與動機，然後舉實例說明什麼是從文化中提取的數學學習特徵，而它如何作為課程探究的進路。篇幅所限，本文僅在數與量範圍內舉例，而將幾何、代數、函數與不確定性留待未來。

貳、背景與動機

數學文化作為課程設計的一個值得探究的方法，是因為認知到現代數學是一個全球性的次文化，但個人的數學教育卻始於母文化 (host culture)¹：學生入學之前以及求學期間，受其當地母文化孕育薰陶，而有一定之初始知識、技能與習慣。因此，數學教育可謂須使學生嘗試適應一個新文化；也就是說，數學課程的目標之一，須將學生從其母文化帶進主流的數學次文化。既然從文化轉銜的視角來詮釋數學教育，則從兩種文化當中探索課程設計的參照與啟發，就可能成為合理而且有效的進路。

首先，本文接受 Wilder (1981, pp. 77-78) 的結論：「幾種不同的數學文化同時存在的時代已經過去了，數學作為次文化，已經具備全球的共同性 (a world-wide unity)。」包括其表達的符號、現有內容的結構以及獲得新知識的方法，都可以說是全球一致的，本文稱之為「數學主流文化」。數學符號的全球性是最明顯的，以最基本的數字為例，世界各種語言的數詞儘管不同，但是用印度—阿拉伯數碼表達的數字卻都一樣。世界各地的兒童，都要學習將其母語中的拾貳寫成 12，玖拾寫成 90。即便大數的分節符號、小數點符號還在世界各地存在些許差異，但數碼的主要原則是全球一致的。例如數碼一定以左側為高位，譬如 12 一定是拾貳而不是貳拾壹，即使在由右向左橫書的希伯來文本和阿拉伯文本中，如果寫出印度—阿拉伯數碼，它一定是從左向右解讀。至於其他符號，例如以 x 、 y 表示變數，以 \sin 表示正弦，以 \log 表示對數，全球都一樣；誠然各地教材用 C 符號表達組合數的方式略有不同，但是專業領域卻相當一致以 $\binom{n}{m}$ 表達「 n 中取 m 」的組合數。至於內容結構，全世界的數學課程都粗分為算術、代數、幾何等，而獲得新知識的方法，也就是數學社群對於「證明」的品質標準，如今已是放諸四海而皆準的。

從前述數學符號的全球性特徵看得出來，我國（乃至於世界各國）數學教育的目標之一，顯然是符合主流文化的數學符號聽說讀寫，也可以說是為學生做好進入數學主流文化的準備。因此，數學課程隱含文化的轉銜，從母文化轉化而進入主流的數學次文化。既然世界各地的母文化有所不同，各自轉銜到數學文化的適當學習進路就應該有差異。例如小學生的入門數學學習目標之一，應是識數，其內容與表現包括母語數詞與印度—阿拉伯數碼的轉換。本文後面會藉此詳加舉例，這裡先指出：因為英語及華語數詞的結構不同，以這兩種語言為母語的文化，識數的課程設計與學習方法，應該也要有所不同。

適當的課程設計與學習方法受母文化影響的原因，可能是因為數學教育也是教育，教育是社會活動，社會活動受文化影響，而文化有民族的差異。雖然先民的知識並不能遺傳給後代，但是透過語言、器物與習慣所形成的社會環境，卻默化著每一個人的思維方式與她／他對這個世界的認知，因此總體而言也影響著學習的成效；而且當數學的學習內容越

¹ 有些研究者將母文化 (host culture) 翻譯成宿主文化。筆者認為後者聽起來好像人類都是地球的寄生蟲，因此建議翻譯成母文化。

接近母語，則民族文化的影響就越大。具體而言，其影響是在初學的時候感到流暢還是窒礙？是自然的還是勉強的？是連結成一個整體的還是孤立斷裂的？

以上動機很接近以維果斯基（Vygotsky）為代表的唯物史觀心理學在教育上的應用（Daniels, 1993）。這個理論認為每個人觸及兩個網絡（networks），一個是體內由神經元為節點所成的網絡，另一個是體外以人為節點所成的網絡；體外網絡已經在歷史作用下具備其結構，稱為社會文化（socio-culture），而體內網絡的初始狀態則相當樸素；個人所謂的學習就是將體外網絡結構映射到體內的過程——起先經由直接的感官經驗，然後經由語言、文字、符號等中介；映射之後的個體可能在內部產生新的結構而觸發行動（activities），進而影響外部網絡中的其他節點，它們一起改變了社會文化的結構，於是創造了新的歷史。這個社會文化的學習理論認為內、外網絡的映射關係受到鄰域（zone 或 neighborhood）的距離制約，將會按照由近而遠的次第發生。外部網絡的鄰近區就是母文化，所以學習的初期必然受制於母文化。

現在，維果斯基理論中的近側發展區被廣泛用在教育領域，但是採用其文化觀點來討論學科學習的論述較為少見，但還是有：例如 Tang 等人（2006）的一項腦神經科學研究運用儀器觀察，發現華語與英語母語者看到印度—阿拉伯數碼而執行心算時，使用的大腦區塊是不同的，而且該文指出語言不是唯一造成差異的因素，還有其他文化因素。

假如我們承認數學學習受到母文化影響，就要擔心一個危險的推論：誤以為某些文化無法孕育傑出的數學家。我們毋須擔憂，因為個人的數學成就與其母文化無關。我們承認數學成就具有個體的差異，但是沒有民族文化的差異。數學文化已經滲透到許多社會文化之中，來自任何文化的個人皆有機會進入；一旦進入數學主流文化，不論個人如何習得數學，都有機會在數學文化中獲致成就。印度人拉馬努金（Ramanujan）可能已經是國際公認的例證，而走進數學主流文化的第一代華裔數學家陳省身與周煒良——兩位先生皆生於辛亥革命之西元 1911 年 10 月——亦可作為近世華人數學成就的典範例。這些個案都表示個人的數學成就與其母文化無關。

基於以上背景與動機，本文倡議從籠統而言的文化中，探究最適合本地文化的數學課程設計與教學方法。所謂「文化取徑」應該適用於各文化，但本文實際關心的是臺灣的數學課程，研究者熟悉的也只是臺灣本地的文化，以下僅以慣用華語與漢字的社會作為母文化的代表，檢視這個母文化的學生可能有哪些數學學習性向的特徵，而這些文化進路的探究，如何協助探索一條可能更流暢的數學課程，最終同樣將學生導入主流的數學文化。為了行文簡便，以下提及「華人」時，意指出自以華語、漢字為其母文化之通用語言文字的人。

參、華語對數學學習的支持

語言是文化的最顯著特徵。陳淑敏詮釋維果斯基時說得好：「語文乃是社會文化和集體心靈意識的表徵符號，儲存了文明變遷的影子，記錄了人類心靈在時光逆旅中蛻變的痕跡，……〔承載了〕集體意識留下的龐大遺產」（陳淑敏，1994，頁 119）。因此，文化取徑

的課程探究，首先應從語言切入。在華語承載的龐大遺產中，包含了以口訣幫助記憶公式的特殊功能，間接支持了自然數計算，而且正好對接印度—阿拉伯數碼；這套舉世通用的數碼系統，對我國以及歐洲各國而言都是外來物件，可是對我們而言數碼和語言若合符節，可謂無縫接軌，所以幾乎以為印度—阿拉伯數碼本來就是漢字，學習相當方便。²本節將以我們母文化的此項特徵作為出發點。

一、華人善算

以下敘述似乎是我們的共同印象：相對於外國人——尤其是西方人——我們特別會算。英國數學教育家 David Tall 也注意到這個現象，而且他認為此事與語言有關。筆者於 2007 年 8 月出席由亞太經合會（Asia-Pacific Economic Cooperation [APEC]）在泰國坤敬（Khon-Kaen）舉辦的數學教育會議，躬逢 Tall 非正式地述及此事。他邀請大約十位不同母語的與會者上台，其中林福來教授代表華人。Tall 請這些數教研究者用本國語言放聲從一數到十；當然，林福來第一個數完。Tall 說，這就是他想要表達的：初等的數學教育與母語有關，華人的語言佔了先天優勢。

前述「印象」有初步的實徵研究支持，例如 Campbell 與 Xue（2001）根據加拿大 Saskatchewan 大學採樣所做的比較研究發現，以華語為母語者的計算能力優於不是亞裔的學生；一份較大樣本，跨英國、中國、俄國的研究則不但確認華語母語者的算術表現最佳，更指出文化可以為此差異做出 28% 的解釋。而 Tall 的猜想也已經獲得初步的實徵研究支持，例如 Ng 與 Rao（2010）不但先回顧亞洲兒童數學表現相對較佳的國際研究文獻，並且指出母語——特別是華語的數詞——是裨益早期數學學習的主要因素。因此「華人善算」可能可以視為客觀現象，而此現象可能來自華語的語言特徵。

數學教育研究者早就注意到語言在數學教學中的關鍵位置。例如 Pimm（1987）很早提到將數學視為一種語言（mathematics as a language）的看法，他在將近四十年前出版的數學課室語言專書，所引發的數教研究持續至今（Planas & Pimm, 2024），而且將語言擴張到溝通——主要是在語言之外多了手勢（gesture），包括操作平板電腦的手勢。但 Pimm 關注的是課室內的語言，本文著眼於社會中通用的自然語言。

反過來，語言教育研究者也注意到語言習得和數學發展之間的關係，特別是在新移民或非母語人士的雙語或第二語言環境中的數學教學，雙語者表現出數學學習的特殊反應，不得不引起教育心理學者的注意。例如有一部專書從「德語作為第二語言」的教學領域出發，探討數學和語言學習的多元關係（Fritz et al., 2021）。這本書的動機之一是：以前的研究者直接剔除雙語兒童樣本，現在課堂中的雙語兒童多到不能剔除而應該成為研究對象了。此書由跨領域學者合作而成，他們的共識之一是：兒童母語中的數詞確實影響學校內的數學學習表現。

² 為什麼華語數詞和印度—阿拉伯數碼若合符節？藍麗蓉（Lam & Ang, 1992）以歷史證據支持她的強力論題（thesis）：古中國發明了十進制的位值觀念與對位記數系統，而印度—阿拉伯數碼源自中國籌算；所不同的僅在於中國用算籌鋪設數值，印度—阿拉伯將它們換成對應的書寫符號。按此論題，印度—阿拉伯數碼根本就不是外來的。

本文認為華語支持自然數運算的特徵有二：一字一音，以及內建十進制。這兩項特徵，不但使得數詞容易掌握——華人兒童幾乎都在五歲之前就能唱數至 100，Miller 等人(1995)的研究支持此經驗——也使得九九乘法成為容易記憶的口訣，更與歐洲傳來的印度—阿拉伯數碼一拍即合，使得數詞中的語音就如數碼一般，數詞語音與數碼符號完整地一一對應。這些特徵使得華人的算術「贏在起跑點」。

華語內建十進制的好處也不容小覷。全世界的基本數學教育主題，可以說都是將數詞從母語建立的數概念，轉譯為世界通用的印度—阿拉伯數碼。舉例而言，很久以前就有英國教育者 (Edgeworth & Edgeworth, 1798) 注意到英語的 *eleven*、*twelve* 是單一概念的數詞，英語母語者將這兩個數詞轉譯成兩位數 11、12 是需要學習的；此外，將 *thirteen* 與 13 互相轉譯，以及將 *twenty-three* 與 23 互相轉譯，心理活動並不相同。可以說：英語數詞從二十一開始，才與數碼符號完成對應，而此現實可能造成英語母語兒童學習識數的額外負擔。兒童的數概念是搭配著母語建立的，現在就可以想像英語母語者在童年時期學習算術所遭遇的困難。

在其他歐洲語言中，二十以後的數詞也不見得就一路通暢了。例如法語並沒有直接說七十、八十、九十的數詞，而是說六十和十，四個二十、四個二十和十。最著名的是丹麥語的九十：*halvfemsindstyve*，其中 *halv* 是半，*fem* 是五，*sind* 是沒有，*tyve* 是二十，意思是「五扣半個二十」，也就是四個半二十；這是丹麥母語者對這個數的原生概念，這個概念跟我們說的「九十」是不一樣的。試想：華語兒童需要多少心理活動，能把九十和 90 來回轉譯，而法語、丹麥語兒童，需要多少心理活動，才能把 90 和他們母語中的數詞來回轉換。

前述舉例當然不能推論法國、丹麥兒童學不會主流數學文化使用的印度—阿拉伯數碼，而是藉以了解：為我國兒童設計的識數課程（數詞與數碼的轉換）所需的時間與教學活動，應該與法國、丹麥的課程有所不同。例如 Miller 等人 (1995) 由中、美各約 100 名兒童樣本發現，兩方兒童都在三歲可以數到十二，但華語兒童在四歲可以數到四十，五歲可以數到一百；相對地，英語兒童四歲數不到二十，五歲數不到五十。

一字一音還有其他好處，例如它適合創造口訣，不但望文生義而且容易記憶。我們的學生喜歡「背公式」或許是文化特徵之一，而此特徵可能來自語言的暗示：我們的語言適合將公式變成口訣，而口訣就適合背誦。如果背公式是一種民族的習慣，數學的教學是否也可以適度地順其自然，而不要與它對抗。且不說公式，基礎數學的許多概念或物件，也是比較容易被中文表述的。例如「圓周率」，只要對中文有基本語感，很容易掌握它的意義，反觀英文並無特定術語，必須原原本本地說 *the ratio of the circumference of a circle to its diameter*。而三角形、四邊形，乃至於五、六、七、八邊形，或者同位角、同側內角、內錯角，在中文幾乎是望文生義，換成英文可就有學問了。

語言與數碼的對應關係為「算數」的教材教法提供啟示。西方的幼兒或低年級數學教育大量使用教具，可能是因為他們需要各種表徵，幫助學童從母語的數概念轉譯成主流文化中的數碼。而華語本身就是數碼，或者說：華語就是數碼的表徵，絕大多數華人兒童不需要物質表徵，憑藉語言就能從 1 唱數到 100，而唱數是基本加減運算的基礎。

在跨文化比較的意義之下，我國學童是否在「算數」方面表現較優？假如是，語言與

數碼的對應關係，對此優勢有多少解釋能力？前面已經展示：這些問題可以做實徵研究，但是它的方法卻相當有挑戰性。例如香港數學教育家梁貫成與同事嘗試用後設分析法（meta-analysis）研究漢字相對於拼音字母的使用者，在數學學習上的表現差異。他們沒有得到顯著差異（Lu et al., 2022）的結果，但是那可能是因為他們採納的實徵研究論文，使得他們只能比較學生用華語學習漢字與用華語學習數學的相關性，以及用外語（主要是英語）學習拼音文字與用外語學習數學的相關性，而且在語文學習方面的量化指標通常是快速反射唱名（rapid automatic naming），研究者不知道測驗內容包含多少數詞，或者多少數量形等數學相關物件。

華語數詞的文化特徵，還可以啟發以下數學教育問題：

- （一）國內非華語家庭的兒童，是否在唱數的家庭教育方面處於劣勢？有哪些政策可以在入學前給予幫助？
- （二）從西方「進口」的關於兒童識數的教學理論與教具，有沒有可能並不必要？也就是說用或不用那些教具，是否對我國學童的識數能力沒有影響？
- （三）承上，我國低年級數學課程的算數教育，是否可以利用華語的數詞特徵，做出與西方各國略為不同的規畫，從而產出自己的常模（norm）與學習理論？例如陳榮治（2014，頁 9）認為我國低年級數學課程可以參考新加坡而略為加速，其實經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD]）的 19 國數學課程比較顯示：我國一年級的意圖課程內容低於 19 國分布的第一四分位數（鄭章華等人，2024；Schmidt et al., 2022, p. 95）。從社會文化觀點看到我國學童可能有優勢的地方，課程設計反而異常保守，因此尤其需要盡快提出來討論。

二、數字分節

這是一件很小的事，卻可能有廣大的影響。可能是因為會計系統的美國化，如今社會上習慣以三位一節書寫大數：例如以 23,470,000 寫兩千三百四十七萬。在特定領域的從業人士之間，或許這樣書寫是正當的。可是三位一節畢竟是順應英語的數詞結構而形成的：在每一節之內以三位數報讀，然後各節續以千（thousand）、百萬（million）、十億（billion）之位名。按照同樣的邏輯，華語的數詞結構卻是四位一節的，每一節的位名是萬、億、兆，在每一節之內以四位數報讀。例如兩千三百四十七萬配合華語的自然書寫應該是 2347,0000。³

其實數學課很少出現大數，反而社會領域、自然領域比較常用大數，但是數學領域應該負起大數讀寫的教學責任。在社會文化的觀點下，除非我們的社會像新加坡一樣習慣改

³ 數詞的分節想法來自母文化，並不是外來的。例如《孫子算經》和《五經算術》都記載了同樣十個「萬」以上的數詞名字，依序是：億兆京垓秭穰溝澗正載，但是古籍卻提供了三種不同的用法。第一種並不分節，把那十個字當作位名，例如 50,0000 說 5 億，2300,0000 說 2 京 3 兆，最多只能說到 15 位數。第二種用法就把那十個字當作節名，而數詞其實有三層結構，最外層八位一節，在八位裡面四位一節，例如五千萬的兩倍是一億，五千萬億的兩倍是一兆，可以說到 88 位數。第三種則用遞迴的方式分節，最多可以說到 8192 位數。民國初年，各門工程與科學團體分別約定他們採用哪一種用法，例如無線電領域採第一種，所以 1 MHz 也就是一千赫稱為兆赫，這個習慣沿用至今。直到教育部的國立編譯館擇定四位一節作為教科書標準用語，這個用法才成為社會習慣。

說「二十三萬」或「四百七十千」這樣的話，否則一般人，特別是小學生，應該順應我們自己的語言而書寫大數。等到長大一些之後，若有需要換成三位一節，應該不至於發生任何困難。

西方的小學課程通常沒有大數，但我國有億、兆（教育部，2018，學習內容 N-5-1）。根據華語的數詞特徵，只要掌握四位一節的道理，則大數的報讀與紀錄都是四位以下數字的重複操作而已，而四位數仍在「華人善算」的範圍內，所以筆者支持我國課程保留大數。但是大數教學宜有以下考量：

- （一）對照英語與華語的數詞結構，大數報讀都有兩個層次的位值：第一層次的三位或四位數報讀，第二層次的節位名。教材與教法可善用這兩個層次的數詞結構。
- （二）宜吻合林福來等人（2013，頁 37-39）的主張：大數搭配概數教學，大數的實際計算，原則上都不要超過四位數。

華語的二層次數詞特徵可以啟發一些數學教育問題，例如：

- （一）對小學生而言，四位一節的數詞結構是否真的比三位一節更容易習得大數報讀？高中學生（普高、技高）是否能夠輕易在四位與三位一節的系統之間轉換？
- （二）節位名搭配數碼，是否可以用來設計 7 年級的浮動小數點（浮點數）教材，並且成為大數科學記號的前置經驗？例如 2347 萬人等於 23.47 百萬人等於 2347,0000 人等於 2347×10^4 人，或者二兆三千億元寫成 2,3000 億元或 2.3 兆元或 2.3×10^{12} 元。

肆、九章對數學思想的啟示

劉徽（263/2013）注的《九章算術》（以下簡稱《九章》）就像歐幾里得的《幾何原本》（Fitzpatrick, 2008；以下簡稱《原本》），集結了成書之前兩百年的數學，以各自的文化品味整理成書。在現代形成全球性的主流數學文化之前，世界上同時存在幾種不同的數學次文化，而《九章》與《原本》引領了兩條可分庭抗禮的數學次文化（郭書春，2006/2018）。從民族數學的觀點看，這兩本書分別形成東亞與西歐的傳統數學內容。誠然，《原本》是主流數學文化的源流，但這並不表示西方的數學課程仍然依循它的指引；相反地，法國在二戰之後開始檢討以推理為主要目的的歐氏幾何在數學教育中的意義，其間最顯著的標記當屬 Dieudonné（1961）號召的「歐幾里得下台」⁴。如今許多國家的數學課程已經割愛了歐氏平面幾何內容，反而我國課程保留了較多的《原本》傳統。另一方面也不表示《九章》就只剩下歷史價值；相反地《九章》足以支持東方文明長達 1500 年的數學需求，其價值不容忽視，特別是它的教育價值。筆者認為《九章》反應華人的思維習慣，它可能比較符合我國學生的秉氣，也很可能是我國學生擅長的學習方法。

⁴ 法語是「A bas Euclide!」。英語世界從 1959 年的 Royaumont Seminar 注意到這個號召，但當時法國已經討論此事一段時間了。

以下第一節闡述《九章》其實符合現代數學教育的基本精神，但是在第二節省思我們需要從《九章》傳統中掙脫的習慣。⁵

一、九章的時代解讀

若將《九章》視為教材，它的教學理念是「以例引題」。題是指問題的類型，古代雖然沒有用符號代表數，但是透過重複舉例，《九章》的「題」其實具有抽象題型的價值；而例是指合情合理的真實情境，因此《九章》的學生比較不會發生「幹嘛要學數學？」的疑問。有一些题型具有明顯需求，所以不需要情境來支持它的正當性，例如計算圓形田地的面積，學生比較容易想像它的需求，就可以省略情境加諸的認知負荷。但有些题型則較為抽象，例如「按比例分配」——叫做衰分（衰讀作摧）——就有豐富的例。⁶《九章》對於「例」的講究，相當於如今對情境的講究。筆者認為《九章》的例確實達到「真實數學教育」（Realistic Mathematics Education [RME]）所主張的「真實」：並不堅持「物質世界」的真實，而是「學生可想像」的真實（Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, p. 521）；直到今日《九章》的「例」仍然可以做為「素養試題」的靈感來源與品質典範。

《九章》一致以問一答一術的結構貫穿全書：問是以例引出的题型，答是解答，術是作法。大多的「術」是以實際數據為例所表達的公式或演算程序，但也有代數表達的術。例如圓田之術就寫了圓面積公式：「半周半徑相乘」。這是一條理論性的公式，把誤差推給了半周的算法，其實就是推給了圓周率的誤差。至於複雜题型的術則實際為演算法，例如衰分當中最複雜的一問，設有不同官位之五人要合出 100 錢，按社會禮儀，官位由高到低出資比例為 $\frac{1}{5}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:1$ （官位越高出資越少）問各出多少錢？它的解法「呼叫」前面已經解釋過的整數比分配算法，這種編排方式不但比擬如今的程式設計，其實也類似《原本》的邏輯編序：前面的命題成為後面的已知。根據自古以來對學生「舉一反三」的要求，《九章》用數據表達的公式或算法，也可以視為具有代數符號的一般性。

《九章》以真實情境引出题型，並以解題作為教學法的範式，與《原本》大相逕庭。可有趣的是：遠的歷史不說，就從 1960 年代「歐幾里得下台」說起，緊接著發生的是「新數學」以及對這一場歷史反動的反省（Kline, 1973），數學教育回歸基本層面之後，美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]）從「數學即解題」（mathematics as problem solving）再出發（NCTM, 1989），這三十年來「解題」的意義發生微妙的演變，但是大方向維持不變：從解決教師安排的數學命題（教學例），演變成歐洲版數學素養（mathematical literacy）以及美國版數學素養（mathematical proficiency）用不同修辭所共同描繪的「在真實世界中解決問題」（劉柏宏，2016）。觀察此一數學教育目標

⁵ 本文以《九章》為主題，引《原本》為對照，《原本》的前半部內容涵蓋國中階段的平面幾何，它的公設一定義一定理一證明結構，成為主流數學文化的經典。《九章》和《原本》的通識性介紹，可參閱（單維彰，2020）。

⁶ 此處所謂的比例是指不均的比，像 1:1:1 這種分配不叫衰分，它就是均分。

與教學範式的轉移，應該可以詮釋為《九章》正好符合注重解決問題之為用的現代數學教育思潮。

我們和《九章》相隔兩千年，當然不能直接將它帶進今天的課堂，但是它以真實情境引進題型，以解題做為教學法的基本架構，是符合時代精神的，而且它的問一答一術結構，可能更符合我國學生的秉氣。如此結構不見容於官方認可的教科書，但是考察坊間大量印行的參考書與測驗卷，很容易辨識出問一答一術的結構。可能是因為應試需求與考試文化的推促，使得問一答一術演變成參考書和題庫的題一解一練：給一個基本題型（不再講究情境），示範一組解題法，接著就做一大批各式各樣變形的題目。官方教科書的範式受到像筆者這樣留學歸國知識分子的推崇，即使我們這些人反對參考書的教學法，但實際上參考書卻長銷不墜。所謂「存在就是合理」，換個社會學的角度來看，反而是留學知識分子可能以階級眼光傲視了自己的同胞，歸國學人不知不覺地成了外地文化的代言人或傳聲筒。問一答一術與題一解一練可能有其一定的教學價值，而且我國學生可能比較適合這種教材。事實上《華人如何學習數學》（范良火等人，2005）多次觸及這個觀點或臆測，但似乎沒有系統性地展開這些議題。特別是：如果我們察覺西方的現代數學教育思潮靠近《九章》，應該可以提醒我們重新評估自身文化中數學教育傳統的價值。

《九章》最受詬病的可能是它不講解原因，而當今數學教育重視「理解」。⁷這個狀況可以分兩個層次來看。淺層而言，以數學教師在主流數學文化中的知識與能力，很容易彌補這項缺點。深層而言，「理解」本身可能太難理解（黃顯華、霍秉坤，2008）而且很不容易評量。⁸當我們強要評量「理解」，可能設計出像「新數學」的問題，例如問小學生「『因為20除以3得6餘2，所以2000除以300得600餘200』對不對？為什麼？」本文建議暫存「理解」而將數學教育的目標具體設定為「帶學生進入數學的主流文化」。就以全世界都教兒童將母語中的數詞寫成印度—阿拉伯數字來看，這確實是各國數學教育理應達成的目標，而且我國的課程也正在這樣做，只是可能未察覺這就是目標。課程（curriculum）之所以是一條跑道，本就該有先後次第。數學課程如果從《九章》的範式入門，累積了足夠的基礎、信心與興趣之後，到了較高年級才導引至主流文化，可能會造就較少放棄數學的中小學生，較多從學校帶走數學素養的國民。

二、九章塑造的數學認識觀

所謂過猶不及，《九章》以例引題的風格強烈影響了其後所有算書，彷彿成為算書不可違背的格式，導致後來因為純粹的好奇而創造新題型、發現新算法之後，即使一時找不到合情合理的情境，還是要「為情境而情境」；這樣的情境當然不真實，稱之為虛構情境（fictitious situation）。有些唐代之前的虛構情境還算有趣，可能有引發

⁷ 感謝一位審查委員指出：「如果將劉徽的注納入《九章》文本，那麼，強調「理解」倒是成為它的主要風貌之一。」

⁸ 若將「理解」對譯 understand，則可能因為此概念太難掌握，Lerman（2014）主編的數學教育百科全書並沒有收錄 understand 或 understanding 的詞條。

好奇心的教育效果——例如出自《孫子算經》（無日期/1993）的雞兔同籠；但是到了宋元之間，當時發展的高次多項式方程（以下簡稱「天元術」）一時還沒有應用，可以說是純粹因為興趣或好奇而發展的數學。以李冶（1248/1983）的《測圓海鏡》為例，它以《九章》的一道測量情境題為基礎，做了非常細緻繁複的推廣，使得那個情境成為一套「譬喻系統」——即「圓城圖式」——其中有大大小小 15 個直角三角形以及一個圓，切割出許多線段，這本書就以同一形式：「已知哪些線段長或它們之間的關係，求某線段長」佈了 170 題，在某些題引進未知數，設立多項式方程，求其解。在數學上，這顯然是偉大的成就。這些題目表面上都有情境，但要評估它們的合理性與真實性，就很難說了。筆者認為《測圓海鏡》是數學內部的提問與解題，它的大多數情境是虛構的。

時至今日，《九章》以真實情境舉例的傳統，被「素養導向」擴大，導致教科書恐怕有情境過多之虞；這個情況可能尤以國小階段為最。楊德清做了非常多跨國教科書比較，他對臺灣教科書「為情境而情境」的狀況深有體認，提醒大家警惕（林義宏，2021）。本文將楊德清所指的狀況也稱為虛構情境，但這些虛構情境並不像《測圓海鏡》的情境那樣導引出重要的數學概念發展，例如「媽媽有 5 個熨斗，她再買 8 個熨斗，一共有幾個熨斗？」（媽媽可能要賣熨斗），「爸爸買的 5 公尺延長線是幾公里？」（爸爸用公里作為測量房屋的單位），「製作一個蛋糕需要 1 小時 40 分鐘，師傅從上午 10 時開始製作，下午幾時能做完四個蛋糕？」（師傅全部做完一個蛋糕才開始做下一個，而且中間全無休息），「小明在花博看到方磚堆成的金字塔，其中一面最上層有一塊磚，第二層三塊，第三層五塊，依此類推，並且看到這一面總共有 144 塊方磚，試問有幾層？」（小明能夠數出 144 塊方磚，卻數不出有幾層）。以上這些題目，全都是曾經出現在國中小教科書或習作裡的題目，但是筆者不便表明出處。

「虛構」本身並無過錯，先民流傳的神話應該都是虛構的，卻成為民族想像力與創造力的表現；基本上所有小說（fictions）都是虛構的，但是有些作品仍能發人深省，甚至引領文化的走向；《測圓海鏡》的虛構情境導引出偉大的數學發展。但是，考慮雞兔同籠和前面舉出的四則現代題目，如果都歸類為虛構情境，教育學者給它們的評價卻可能不同：可能認為有些題目有趣，有些題目能引發好奇心，但另一些題目則無趣，不能引發任何共鳴。於是，這就產生一些研究問題，例如：

- （一）如何辨識無助於學習的虛構情境？可否達成有共識的判斷規準？
- （二）無助於學習的虛構情境，對數學的學習態度或情意，是沒有影響還是有害？例如會不會導致學生「不喜歡數學」？——這是楊德清專訪（林義宏，2021）的標題——會不會頓挫「數學有用」的信心？

《九章》的經典地位也導引了讀者，長期以來認為數學就該像《九章》那樣明確有用。這樣的心理，可能使得華人對於暫時不明其用的數學「耐受度」不高，不容易維持探究的興趣。此一臆測的支持性證據是：宋元之間的天元術被明代遺忘。或許有人認為這是明代更為緊箍的科舉考試制度使然；科舉制度很可能傷害創造力，但是晚明出版了幾部全面統

整科技文明的巨著，包括 1592 年的《算法統宗》、1596 年的《本草綱目》、1637 年的《天工開物》、1639 年的《農政全書》等，顯示科學並沒有徹底撲滅學術研究的興趣與能量，但李冶（1248/1983）與朱世傑（1299/1993）等人的天元術，畢竟在明代暫時失傳，直到清代才與西來的代數相互映證而重獲新生。

在學術上，純粹出於好奇而尚未確認應用價值的數學（以下簡稱「純數學」）有其必要，人們可能在數學知識備齊之後才發現它的應用；這一點已經有許多歷史經驗，無庸置疑。可是在教育內容中，並不會選擇這樣的課題；如今被選入課綱的學習內容，都是已確認應用價值的數學。即使如此，站在學生的立場來看，不能「緊接著」看到用途（或學習目的）的內容，就是純數學。根據前述歷史經驗推論，應該盡量避免讓學生遭遇純數學，否則可能阻斷繼續學習的動機。

如果課綱選擇的是確知其用的數學，學生在課堂卻感受純數學，那麼問題就可能發生在學習內容的順序安排。以前有一種課程設計理念，把較複雜的學習內容拆解成較基本的小單元，然後取不同內容共同需要的小單元，將它們編成逐一學習的單元，在需要它們的學習內容出現之前，就先熟練這些共同基本的小單元；編序教學（programmed instruction）可視為此課程理念的實踐，支持者認為這樣的課程是科學的、高效率的（Casas, 2002）。這樣編排的課程，會把程序性數學知識安排在需要之前，譬如在學生需要用分數的混合四則運算解決問題之前，就先把分數的混合四則運算練得精熟。

數學課綱還留有編序教學的設計，譬如 7 年級的「指數律」在國中階段看不到用途，8 年級的「多項式四則運算」看不到脫離方程式情境的必需性，10 年級的「多項式不等式」要到 12 年級選修了導函數之後才用得上。但是教科書可能呈現了更多編序教學，譬如 7 年級教科書習慣在真正需要用正負數混合計算解決問題之前，就先要學生熟練算式中有複雜括號的正負整數與分數混合計算，或者在真正需要「式的運算」之前，就先讓學生熟練二元一次式的線性組合運算。

避免讓學生遭遇「看不到目的」的學習內容的解決方案之一，還是謹守《九章》以例引題的大原則，而且要像《九章》那樣，引的是合情合理的真實情境範例。《九章》集結它前面 200 年的數學，擁有足夠的歷史縱深，使得《九章》的編者們（可能不只一人）能夠分門別類且由簡入繁地，為它的題型找到真實情境。如今的中小學數學學習內容，發生在我們之前至少也有 200 年，只要我們有意識要完成這項任務，用一代人的集體智慧與創造力，應該也能像《九章》一樣，為每個學習主題擬定一組典型的真實引例。

國中小教科書已經朝此方向前進了：在每一章首安置引起動機的漫畫。可是一章不止一個學習主題，例如 8 年級比與比例那一章（2023 年各版本皆同），至少應該有按比例分配、同比縮放、比例式（一元一次方程式）、正比關係、反比關係這五個主題。前三個主題大約屬於算術或代數，而且《九章》可以提供第一個主題（按比例分配）的引例想法，至於後面二個主題則在概念上更靠近「兩量關係」，是「函數」的入門課題，可能不適合從《九章》或其他傳統典籍找尋啟示。當我們不容易從母文化索求典範時，外地文化自然成為觀摩的對象。

伍、外文化的砥礪

外地文化不一定「比較好」，但是一定值得「比較」。況且數學主流文化是由西方文化匯流而成的，數學教育最終要把學生引導到那裡，所以文化取徑的課程研究不能只關注母文化，必須也能用他人文化探照自己，明辨其中可取或可戒之處。研究者從過去二十多年參與課綱研修工作，凝聚以下兩項參採外國課程的心得，與讀者共勉：

- (一) 文化不可移植——文明可以，但文化不可——假如決定要引進外文化，必須謹慎而保守地引進。
- (二) 觀摩文化不能只取當代的一個剪影，應以「人文觀點」視之，亦即：文化是在社會中形成的，而社會是人的網絡，要關注文化變動的歷程，而且警覺它從未停止變動；例如前面說西方傳統中的數學教育範式是《原本》，但是如今「解決問題」的思潮卻反而比較接近《九章》。

本節將以「數與量」的部份學習內容為例，解釋取徑於外地文化的課程研究思考。首先討論數與量學習內容的社會習慣，其次探討分數與小數的教學。

一、數與量：自然數與實數

「數與量」是數學課程中最基本的學習內容，要特別說「數與量」而不說「數量」，很可能是因為數（number）和量（quantity）自古以來——不論中外——本來就是兩個概念，西方是在笛卡兒之後才將它們統整起來（洪萬生，2024，頁 46、104）。古人說的「數」都是指正整數，而「量」是指用一個單位去測度連續量的結果。如今數學課綱當中的「數與量」，其中「數」建議詮釋為自然數——本文約定自然數是正整數或零，而「量」則建議詮釋為實數。中文世界可能在徐光啟之後才有此認知，他說「幾何原本者，度數之宗」（王重民，1963/1986），其中度是測度連續量所得的量，而數是點算離散量所得的自然數。雖然徐光啟只筆受《原本》的前六卷，但是他知道其完整內容不僅有平面圖形的知識，也有整數論、無理數論和空間形體，所以徐光啟才會說《原本》是測量與點算的共同基礎（度數之宗）。

我國通常將「數與量」的「量」解讀為度量衡、冷暖與時間，這樣固然正確，但「量」更精確的數學意義應該是指實數，「量」更精確的教學目標可以說是螺旋地教導實數：此一螺旋，在美國、英國、德國課程中，都是從 6 年級的負數開始，而這些國家的課程，將負數的引進視為開始學習有理數，也就是把負整數視為有理數，然後發展到 8 年級的無理數。歐美的數學教科書不一定正式教導「實數」這個專有名詞，我國課程則傳統上在 10 年級正式介紹實數；事實上，中學階段不能完成「實數」的學習，完整的「實數」知識要由分析導論、測度論，以及集合論共同建立，但是這些內容顯然過於專業，不適合素養導向的中小學課程。既然可以判定中學不可能完成實數教學，那麼「數與量」當中的「量」該如何螺旋地設計在課程裡，使得它既足夠中等數學所需，又支持國民的數學素養，就成為值得再度全面檢視與討論的議題。

研究者提出「量」課程再商榷的意見，是因為察覺到我國與歐美在這個主題的呈現方式有認知差異。例如我國引進負數之後，習慣將負整數當作獨立的數學物件，以前甚至將正整數的部份性質延伸到負整數，直到 99 課綱才停止那些內容。而西方教材一旦引進負數，就開始教實數（或者說實數的前身：有理數），不會特別討論負整數。因為這項認知差異，筆者猜想：有相當數量的小學教師將數線上的 1、2、3 認知為正整數，但其實它們在數線上代表的是實數 $1.000\dots$ 、 $2.000\dots$ 、 $3.000\dots$ 。同理，可能有相當數量的中學教師對 -1、-2、-3 的認知是負整數，而不是實數或有理數。這個非常細微的認知心理，可能導致教學過程中難以察覺初學者需要一種觀念的轉銜與建立：例如當 22 和 7 是正整數時， $22 \div 7$ 等於 3 餘 1，但是當 22 和 7 至少一個是實數時， $22 \div 7 = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} \approx 3.14$ 。至於學生怎麼判斷 22 和 7 是正整數還是實數？字面上確實無法判斷，必須從情境中判斷，這就是真實情境在數學教育中的重要性之一。數或量的選擇，在情境中應有合理的判定，而不是任意的。如果忽視情境，就可能造成前面說的虛構情境。而數或量的判斷，不僅攸關國民的數學素養——具體表現就是該選用哪一種除法來做 $22 \div 7$ ——在這個數位時代更有其附加價值，它也是運算思維的基本概念之一。

長期以來，因為數學教學不使用計算工具，養成了以數取代量的習慣。例如面積當然是連續量，但是教材習慣使用整數邊長或高作為算法幾何的範例，所以操作的都是數而不是量；這樣的習慣甚至延伸到高中的三角測量，為了操作方便，直角三角形的邊長常常是滿足畢氏定理的三個整數（例如 3-4-5、5-12-13 等）。以簡單整數示範數學應用是無可厚非的，但是長期這樣做而且僅這樣做，對於實數的數感（number sense）應該會有不良的影響，對於估計與概數的學習，更有直接的妨礙。這樣的習慣，會形成數學教育的文化，從教學方法到評量試題，將會一致性地吻合文化，這是我們需要察覺，並且加以探究的。

與西方教材相比，或者甚至與《九章》相比，我國教材顯得過於倚重離散量做為分數的表徵。就像披薩本來可以連續分割，經過單位量詞（張、片、盤）的轉換之後，像披薩這種連續量就變成了離散量。華語提供豐富多元的單位量詞，方便我們將連續量轉變為離散量，這或許是我們母文化的特色之一，而數教前輩與先進善用此特色，發展出相當獨特的小學教材教法（以致於在雙語教學中難以翻譯成英文），成功地使用離散量的等分除與包含除來解釋整數除法，並延伸到分數除法。

相對地，《九章》不但在連續量的衰分情境中引進分數，另外也在算法幾何（面積與體積公式）——也就是《九章》的〈方田〉章與〈商功〉章——自然使用分數，主要是因為測量邊長時，難免出現不足一單位的零頭，而且有些面積與體積公式本身就有分數。離散化的除法教學，肯定有其成效，但本文想要提出商榷的是：它有可能弱化了連續量的認知，導致學生減少操作數線的機會（例如在數線上處理連續量的包含除）。主流的數學次文化以數線做為實數的表徵，我國的數學教育最終須將學生帶領到這種表徵，並使學生能利用數線來學習實數的各種性質。因此，缺乏數線經驗，對學生是不利的。這是本文要提請再商榷的原因。

二、普通分數與十進分數：分數與小數

華語在識數方面的優勢，到了分數就沒有了。英語有 *one third* ($\frac{1}{3}$)、*two thirds* ($\frac{2}{3}$)、*one quarter* ($\frac{1}{4}$)、*three quarters* ($\frac{3}{4}$) 這些數詞，可能支持英語母語兒童的分數學習，華語沒有相對的數詞，只能直接學習專有名詞：三分之一、四分之三等。何況分數的說法和符號，違背華語對應漢字的書寫習慣，可能也對初學者造成小小的障礙。例如，按照中文的語感，「三分之二」由上而下寫成 $\frac{3}{2}$ 是比較自然的；事實上，當分數符號在明朝末年初次傳入中國時，的確把分母寫在上方，到了清朝末年才由西方在華傳教士開會決議一致將分母寫在下方（代欽、松宮哲夫，2017，頁 174）。

「量」本質上不同於「數」之處，在於實數作為連續量的測度，總是帶著誤差，換個觀點來看就是帶著零頭（*fraction*）。數學用兩種形式表達零頭：分數、小數。英語將分數與小數都稱為零頭，這可能是英語教材比較清楚展示分數與小數「同源」的原因。用分數表達的零頭，英語是 *vulgar fractions*（鄉土零頭），後來美國習慣說 *common fractions*（普通零頭）；用十進制小數表達的零頭是 *decimal fractions*（十進零頭）。十八、十九世紀英國和美國的算術課本都有普通零頭和十進零頭這兩種內容（Greenwood, 1729）。直到 1960 年代之後，前面兩種說法才開始式微而讓位給簡化的說法：以 *fraction* 專指分數，*decimal* 專指小數。⁹

分數跟小數，都是處理零頭的方法。選擇使用哪一種數來處理零頭，顯然不是由數學家規定的，而是社會的約定俗成。至於社會又為什麼會形成某種約定，則是根據慣用的工具而形成的。所謂工具，包括測量的工具以及交易的工具（通貨）。

例如前面舉過不同官位之五人衰分 100 錢的問題，在貨幣等同貴金屬之重量的前提下（Rothbard, 2015/2021），這是連續量的分配題型，其中一人該付的金額是 $8\frac{104}{137}$ 錢。這是沒有誤差的真確答案，但《九章》沒有交代該怎麼支付這筆金額的零頭，這就是社會文化的介入點了。當時的工匠或許真的可以切割出 $\frac{104}{137}$ 錢的重量，但是經常切割貴金屬顯然是不合宜的，於是社會約定了定額的通用貨幣；例如巴比倫可能把 1 錢分成 60 角，每角分成 60 分，那麼前述零頭就是 45 角 32 分再加上大約 $\frac{51}{60}$ 分，交易雙方可能會自己決定捨去它或者加上 1 分。至於中國古代社會，在《九章》之後逐漸穩定於十進制的單位系統（唯一顯著的例外是 1 斤 16 兩）。例如由魏徵（636/2010）主編之《隋書》律曆志記載著：祖沖之假設直徑為 1 丈，則圓周長的盈數（上界）為三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，意思是

⁹ 筆者在 2023 年 4 月 25 日利用 Google Books 的字頻統計工具 books.google.com/ngrams/，針對 1800–2019 年段之 English 2019 語料庫，查詢 *vulgar fraction*、*common fraction*、*decimal fraction* 和 *decimal number*，根據所得的字頻數據而獲得前述結果。

3.1415927 丈。類似地，交易工具也發展成十進制的貨幣系統，例如 $8\frac{104}{137}$ 錢如果是清朝的「錢」，則它近似 8 錢 7 分 5 厘 9 毫 1 絲 2 忽；如果當時的「錢」是新台幣「萬元」，則它近似於 8 萬 7591.2 元，交易雙方只要協商如何處理那 0.2 元的零頭就可以了。

前面的例子顯示分數提供真確的數學解，但是這個解在社會中的實踐卻倚賴於工具：包括測量的工具、交易的工具。中國的十進制單位系統，明顯等價於十進制小數。中國的測量與交易工具，很早以前就採取十進制，這就使得十進零頭（小數）變得比分數普及；例如我們的算盤很容易用來計算小數，卻沒有特別為分數設計的機關，相對而言歐洲社會使用的算盤就有專為分數計算而備的溝槽。用十進制來標準化單位系統與工具，在西方一直遲至十七世紀後期，在法國大力推行所謂「公制單位」之後才逐漸出現；而這樣的工具對歐洲所有地區而言都是外來的、不自然的，經過一段時間的掙扎才逐漸接受。所以分數的優點是真確，小數的優點是易於實踐；分數的缺點是難以實踐，小數的缺點是經常有誤差——因應後者而起的是概數及其有效位數；而有效位數取決於工具，它只能在情境中判定，不關數學底事。

可能因為前述文化脈絡，西方教材在分數與小數的「同源」——它們是兩種表達零頭的方式，而且小數是特殊的（標準化的）分數——有較多著墨，這方面概念值得我們參考，畢竟它不但是事實也是主流文化。但是在課程安排與教材教法上，我們還可以嘗試從母文化尋找更適切的作法，例如以下議題：

- （一）「量」的教學難免要安排在國小、國中與高中，如何安排三階段課程的妥適、銜接與一致？
- （二）在情境中辨識正整數與實數兩種除法的能力，例如辨識 $22 \div 7$ 該得到哪一種答案，是否值得關注？
- （三）在情境中判定適當有效位數之概數的能力，是否為「概數」主題應有的教學目標，而不僅止於能在指定位置做四捨五入？而這樣的目標適合安排在哪一階段？
- （四）分數與其近似小數的轉換，是否應該比現有課程更加強一點？
- （五）分數作為「數學物件」的存在，以及分數與分數的四則運算，可不可以設計成更多階段的課程？對此問題，筆者提議：均分和衰分為分數的存在提供了合理的需求，而且衰分是比例式與等比關係的前置經驗，它們應該都是小學階段的合理內容；但是分數運算的需求，在代數（包括微積分）運算過程中才真正出現，¹⁰並不急著在小學階段精熟。在真正需要分數運算之前，提早要求分數運算的精熟，使它在學生認知中成為暫時不知為何要學的「純數學」。

¹⁰ 此一理念是由謝豐瑞啟發的。

陸、結論

本文提議將數學教育的目標設定為「導入主流的數學文化」，並假設學習內容越接近母文化時，初學者越容易獲得成功的學習經驗；因此，筆者認為數學史在教育中的應用(HPM)也可以實踐在課程綱要層次，做為挑選內容與安排次第的依據，並以此文嘗試其可能性，也嘗試據此理念提出實徵研究的問題。

我們的母文化有支持數學學習的成分，例如我們善於整數與小數的計算，我們容易背誦公式，我們願意為了做一名負責的學生而堅忍學習的重任。這篇文件只能初探文化取徑之課程研究的一般性理念，僅在「數與量」主題範圍內舉例。將來可以進一步探究的數學學習議題包括：我們的母文化對「角」和「未知數」的陌生，以及對「幾何」的思維習慣需要一些努力才能轉銜到主流文化；至於解析幾何(包括微積分)、統計與機率，對西方母語者也是新觀念；筆者認為臺灣學生這方面的基礎大致與西方同學相等，不同的是這些觀念全是近百年之內大量翻譯進來的，與當下慣用的華語有一定的隔閡，這反而是在中等、大專階段實施雙語數學教學的支持點之一(單維彰、曾政清，2022)。

有些課程學者反省我國的課程研究常是「西方的傳聲筒……盼望能從歷史回顧、社會文化等角度」尋找臺灣自己的出路(周愚文，2014，頁387)；本文正是在數學課程領域做此努力。希望讀者同意：《九章》以及其他中國古算書，是數學課程設計、教材教法、素養導向評量的靈感來源。但靈感只能產生理念與主張，教育政策的抉擇仍講究證據。本文根據文化取徑的先驗理念做邏輯推論，提出一些有待實徵研究的問題，散見於各節。

誌謝

感謝徐式寬籌組「中華文化中的教育與教養」讀書會，我跟著學習了六年，從她和閻鴻中、徐聖心、李賢中、黃春木、杜加維等人學到許多知識與思想；也感謝徐教授閱評本文初稿，並協助修訂改版與建議重要文獻。謝謝劉柏宏、英家銘對兩年之前的初稿提供寶貴意見，也感謝匿名審查委員們的悉心指教。

參考文獻

- Rothbard, M. N. (2021)。貨幣簡史：你不能不知道的通膨真相（陳正芬、高翠霜譯）。經濟新潮社。（原著出版於 2015 年）[Rothbard, M. N. (2021). *What has government done to our money?* (Chen, C.-F. & Gao, T.-S., Trans.) EcoTrend Publications. (Original work published 2015) (in Chinese)]
- 王重民（1986）。徐光啟集。明文書局。（原作出版於 1963）[Wang, C.-M. (1986). *Collected works of Paulus Seu*. Ming-Wen Publisher. (Original work published 1963) (in Chinese)]
- 代欽、松宮哲夫（2017）。數學教育史—文化視野下的中國數學教育。北京師範大學出版社。[Dai, Q., & Matsumiya, T. (2017). *The history of Chinese mathematics education from a cultural perspective*. Beijing Normal University Press. (in Chinese)]
- 朱世傑（1993）。算學啟蒙。河南教育出版社。（原著出版於 1299 年）[Zhu, S.-J. (1993). *Arithmetic enlightenment*. Henan Education Press. (Original work published 1299) (in Chinese)]
- 李冶（1983）。測圓海鏡。臺灣商務。（原著出版於 1248 年）[Li, Z. (1983). *Sea mirror of circle measurements*. The Commercial Press. (Original work published 1248) (in Chinese)]
- 周愚文（2014）。教育史學研究。國立臺灣師範大學出版中心。[Chou, Y.-W. (2014). *Research in educational history*. National Taiwan Normal University Press. (in Chinese)]
- 林義宏（2021 年 6 月 30 日）。「我不喜歡數學！」嘉大楊德清談臺灣中小學數學課本發生了什麼事？國科會人文島嶼平臺。[Lin, Y.-H. (2021, June 30). "I hate math!" Prof. Yang at Jia-Yi University talks about what are going wrong in primary math textbooks. Humanity Island of NSTC] <https://humanityisland.nccu.edu.tw/yang-d-c/>
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究（計畫編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。國家教育研究院。[Lin, F.-L., Shann, W.-C., Lee, Y.-S., & Chen, C.-H. (2013). *The pilot study for 12-year basic education curriculum: Mathematics*. National Academy for Educational Research. (in Chinese)]
- 姚如芬（2014）。當數學遇見原民文化—發展原民數學模組之個案研究。科學教育學刊，22（2），135–161。[Yao, R.-F. (2014). When math meets indigenous culture: A case study of developing mathematics modules for indigenous students. *Contemporary Journal of Science Education*, 22(2), 135–161. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6173/CJSE.2014.2202.02>
- 洪萬生（1998a）。發刊詞。HPM 通訊，1（1），1。[Horng, W.-S. (1998a). Foreword. *HPM Newsletters*, 1(1), 1. (in Chinese)]
- 洪萬生（1998b）。HPM 隨筆（一）。HPM 通訊，1（2），1–3。[Horng, W.-S. (1998b). A note on HPM (1). *HPM Newsletters*, 1(2), 1–3. (in Chinese)]
- 洪萬生（主編）（2024）。數之軌跡Ⅲ：數學與近代科學。三民書局。[Horng, W.-S. (Ed.). (2024). *Lectures on mathematics history 3: Mathematics and modern sciences*. San-Min. (in Chinese)]
- 范良火、黃毅英、蔡金法、李士錡（主編）（2005）。華人如何學習數學。江蘇教育出版社。[Fang, L.-H., Wong, N.-Y., Cai, J.-f. & Li, S.-Q. (Eds.) (2005). *How Chinese learn mathematics*. Phoenix Education Publishing, Ltd. (in Chinese)]
- 孫子算經（1993）。河南教育出版社。（原著出版年代無日期）[*The mathematical classic of Sunzi* (1993). Henan Education Press. (Original work published no date) (in Chinese)]

- 徐偉民、曾于珏 (2013)。臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書代數教材之比較。《教科書研究》，6(2)，69–103。[Hsu, W.-M. & Tseng, Y.-J. (2013). A comparison of algebra content in instructional materials in elementary school mathematics textbooks of Taiwan, Finland and Singapore. *Journal of Textbook Research*, 6(2), 69–103. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6481/JTR.201308_6\(2\).03](https://doi.org/10.6481/JTR.201308_6(2).03)
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域。作者。[Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools—Mathematics*. Author. (in Chinese)] <https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/27338/72246.pdf>
- 郭書春 (2018)。中國傳統數學與數學機械化。載於郭書春 (主編)，郭書春數學史自選集 (頁 831–843)。山東科學技術出版社。(轉載自〈中国传统数学与数学机械化〉, 2006, 曲阜师范大学学报 (自然科学版), 32[3], 1–9) [Guo, S.-C. (2018). Traditional mathematics of China and mathematics mechanization. In S.-C. Guo (Ed.), *Self-Selected works in history of mathematics by Guo Shu-chun* (pp. 831–843). Shandong Publisher of Science and Technology. (Reprinted from "Traditional mathematics of China and mathematics mechanization", 2006, *Journal of Qufu Normal University (Nature Science)*, 32[3], 1–9) (in Chinese)]
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛 (2005)。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。教育部。[Chern, I.-L., Shann, W.-C., Horng, W.-S., & Yuan, Y. (2005). *Study on the evaluation and development of mathematics curriculum for primary and secondary education*. Ministry of Education. (in Chinese)] <https://reurl.cc/IND6Kl>
- 陳淑敏 (1994)。Vygotsky 的心理發展理論和教育。屏東師院學報，7，119–143。[Chen, S.-M (1994). Vygotsky's theory of mind and education. *Journal of Pingtung Teachers College*, 7, 119–143. (in Chinese)]
- 陳榮治 (2014)。十二年國民教育「數學課程標準」之研究 (計畫編號：NSC 102-2511-S-415-005)。國家科學及技術委員會。[Chen, J.-C. (2014). *A study of 12-year basic education curriculum standards in mathematics* (Report No: NSC 102-2511-S-415-005). National Science and Technology Council. (in Chinese)]
- 單維彰 (2020)。文化脈絡中的數學。中央大學出版中心/遠流。[Shann, W.-C. (2020). *Mathematics in cultural contexts*. National Central University Press/ Yuan-Liou Publishing. (in Chinese)]
- 單維彰、曾政清 (2022)。高中數學雙語教學之理念與作法倡議。《臺灣數學教師》，43(1)，35–47。[Shann, W.-C., & Tseng, C.-C. (2022). The purpose and practice of bilingual instruction in high school mathematics: A proposal. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, 43(1), 35–47. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6610/TJMT.202204_43\(1\).0003](https://doi.org/10.6610/TJMT.202204_43(1).0003)
- 游自達、陳淑娟 (2016)。臺灣解嚴前後國小數學教科書的發展與改變：黃敏晃口述史之分析。載於周淑卿、歐用生、楊國揚 (主編)，臺灣國民中小學教科書課程觀的演變：口述史的研究 (頁 73–122)。國家教育研究院。[You, Z.-D., & Chen, S.-J. (2016). The development and changes of elementary school mathematics textbooks in Taiwan before and after the lifting of martial law: An analysis of oral history of Minhuang Huang. In S.-C. Chou, Y.-S. Ou, & K.-Y. Yang (Eds.), *Evolution of the curriculum views in Taiwan's elementary and secondary school textbooks: The Study of oral history* (73–122). National Academy for Educational Research. (in Chinese)]
- 黃顯華、霍秉坤 (2008)。理解「理解」：為「理解」的教學。香港中文大學。[Wong, H.-W. & Fok, P.-K. (2008). *Understanding understanding: Teaching for understanding*. The Chinese University of Hong Kong. (in Chinese)] <https://hkier.cuhk.edu.hk/en/publications/sop46>

- 楊德清、鄭婷芸 (2015)。臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之分析比較。 *教育科學研究期刊*, 60 (1), 33–72。 [Yang, D.-C. & Cheng, T.-Y. (2015). Geometry content of middle school textbooks in Taiwan, the United States, and Singapore. *Journal of Research in Education Sciences*, 60(1), 33–72. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6209/JORIES.2015.60\(1\).02](https://doi.org/10.6209/JORIES.2015.60(1).02)
- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵－理論與案例分析。 *臺灣數學教育期刊*, 3 (1), 55–83。 [Liu, P.-H. (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture - Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55–83. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6278/tjme.20160413.001>
- 劉柏宏 (2021)。論數學文化與數學教育的關係。 *臺灣數學教育期刊*, 8 (1), 79–88。 [Liu, P.-H. (2021). On the relationship between mathematical culture and mathematics education. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 8(1), 79–88. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8\(1\).004](https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8(1).004)
- 劉徽 (注) (2013)。 *九章算術 (漢英對照)* (李淳風等，注釋；郭書春，校勘並譯注；道本周、徐義保，英譯並注)。遼寧教育出版社。(原著出版於 263 年) [Liu, H. (Annot.), (2013). *Nine Chapters on the Art of Mathematics (Chinese-English)* (Li, C.-F., Notes & Annot., Guo, S.-C., Modern Chinese Trans. & Annot., Dauben, J. W., & Xu, Y.-B., English Trans. & Annot.). Liao-Ning Education. (Original work published 263) (in Chinese and English)]
- 鄭章華 (主編) (2018)。 *數往知來 歷歷可述：中小學數學課程發展史 (上冊、下冊)*。國家教育研究院。 [Chen, C.-H. (Ed.). (2018). *History of Taiwanese school mathematics curriculum: 1968–2011*. National Academy for Educational Research. (in Chinese)]
- 鄭章華、單維彰、林佳慧 (2024)。評析 OECD 跨國數學課程比較研究及其對臺灣數學課程發展之啟示。 *臺灣教育研究期刊*, 5 (1), 361–375。 [Chen, C.-H., Shann, W.-C., & Lin, C.-H. (2024). An evaluation of the OECD cross national mathematics curriculum comparison study and its implications for the development of Taiwan's mathematics curriculum. *Journal of Taiwan Education Studies*, 5(1), 361–375. (in Chinese)]
- 魏徵 (主編) (2010)。 *隋書*。臺灣商務。(原著出版於 636 年) [Wei, Z. (Ed.). (2010). *The book of Sui*. The Commercial Press. (Original work published 636) (in Chinese)]
- Aikenhead, G. S. (2021a). A 21st century culture-based mathematics for the majority of students. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 37, 1–35.
- Aikenhead, G. S. (2021b). A rationale for the junior-senior secondary mathematics curriculum 2.0. *In Education*, 27(1), 2–22. <https://doi.org/10.37119/ojs2021.v27i1.494>
- Burton, L. (2009). The culture of mathematics and the mathematical culture. In O. Skovsmose, P. Valero, & O. R. Christensen (Eds.), *University Science and Mathematics Education in Transition* (pp. 157–173). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09829-6_8
- Campbell, J. I. D., & Xue, Q. (2001). Cognitive arithmetic across cultures. *Journal of Experimental Psychology: General*, 130(2), 299–315. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.130.2.299>
- Casas, M. (2002). *The use of Skinnerian teaching machines and programmed instruction in the United States, 1960-1970* (ED469942). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED469942.pdf>
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44–48. <https://www.jstor.org/stable/40247876>
- Daniels, H. (Ed.). (1993). *Charting the agenda: Educational activity after Vygotsky*. Routledge.

- Dieudonné, J. (1961). New thinking in school mathematics. In H. F. Fehr & L. N. H. Bunt (Eds.), *New thinking in school mathematics* (pp. 31–46). OEEC.
- Edgeworth, M., & Edgeworth, R. L. (1798). *Practical Education*. Johnson and Johnson.
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.). (2002). *History in mathematics education: The ICMI study*. Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1>
- Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's elements of geometry*. Author. <https://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>
- Fritz, A., Gürsoy, E., & Herzog, M. (Eds.). (2021). *Diversity dimensions in mathematics and language learning: Perspectives on culture, education and multilingualism*. De Gruyter. <https://doi.org/10.1515/9783110661941>
- Greenwood, I. (1729). *Arithmetick vulgar and decimal: With the application thereof, to a variety of cases in trade, and commerce*. T. Hancock.
- Ja'faruddin & Chen, W. H. (2023). Ethnomathematics in wedding traditions: Numerical analysis of Bugis Makassar wedding days. In N. Djam'an, S. Sidjara, S. Fachry, & N. W. Ashari (Eds.), *Advances in computer science research: Vol. 109. Proceedings of the 5th International Conference on Statistics, Mathematics, Teaching, and Research 2023 (ICSMTR 2023)* (pp. 145–154), Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/978-94-6463-332-0_17
- Kliebard, H. M. (1975). The rise of scientific curriculum making and its aftermath. *Curriculum Theory Network*, 5(1), 27–38. <https://doi.org/10.2307/1179327>
- Kline, M. (1954). *Mathematics in western culture*. Allen & Unwin.
- Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the new math*. St. Martin's Press.
- Lam, L. Y., & Ang, T. S. (1992). *Fleeting footsteps: Tracing the conception of arithmetic and algebra in Ancient China*. World Scientific.
- Lerman, S. (Ed.). (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- Lloyd, G. E. R. (2009). *Disciplines in the making: Cross-cultural perspectives on elites, learning, and innovation*. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199567874.001.0001>
- Lu, H., Leung, F. K. S., & Fan, Z. (2022). Chinese language and students' mathematics learning: A meta-analysis. *ZDM—Mathematics Education*, 54(3), 513–528. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01333-x>
- Miller, K. F., Smith, C. M., Zhu, J., & Zhang, H. (1995). Preschool origins of cross-national differences in mathematical competence: The role of number-naming systems. *Psychological Science*, 6(1), 56–60. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1995.tb00305.x>
- Nasir, N. S., Hand, V., & Taylor, E. V. (2008). Culture and mathematics in school: Boundaries between “cultural” and “domain” knowledge in the mathematics classroom and beyond. *Review of Research in Education*, 32(1), 187–240. <https://doi.org/10.3102/0091732X07308962>
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Author.
- Ng, S. S. N., & Rao, N. (2010). Chinese number words, culture, and mathematics learning. *Review of Educational Research*, 80(2), 180–206. <https://doi.org/10.3102/0034654310364764>
- Ornstein, A. C. (1987). The field of curriculum: What approach? What definition? *The High School Journal*, 70(4), 208–216. <http://www.jstor.org/stable/40364981>
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Routledge.

- Planas, N., & Pimm, D. (2024). Mathematics education research on language and communication including some distinctions: Where are we now? *ZDM—Mathematics Education*, 56(1), 127–139. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01497-0>
- Rogers, V. (1981). [Review of the book *Curriculum Inquiry*, by J. I. Goodlad]. *International Review of Education / Internationale Zeitschrift Für Erziehungswissenschaft / Revue Internationale de l'Education*, 27(1), 96–98. <http://www.jstor.org/stable/3443785>
- Schmidt, W. H., Houang, R. T., Sullivan, W. F., & Cogan, L. S. (2022). When practice meets policy in mathematics education: A 19 country/jurisdiction case study. *OECD education working papers*, No. 268. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/07d0eb7d-en>
- Tang, Y., Zhang, W., Chen, K., Feng, S., Ji, Y., Shen, J., Reiman, E. M., & Liu, Y. (2006). Arithmetic processing in the brain shaped by cultures. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 103(28), 10775–10780. <https://doi.org/10.1073/pnas.0604416103>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521–525). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170
- Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 1, pp. 258–271). American Mathematical Society.
- Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a Cultural System*. Pergamon Press.